

Leis de Kirchhoff

1. Introdução

O comportamento dos circuitos elétricos é governado por duas leis básicas chamadas *Leis de Kirchhoff*, as quais decorrem diretamente das leis de conservação de carga e da energia existentes no circuito. Elas estabelecem relações entre as tensões e correntes entre os diversos elementos dos circuitos, servindo assim como base para o equacionamento matemático dos circuitos elétricos. Antes do enunciado das referidas leis, torna-se, entretanto, necessário a introdução de algumas definições básicas:

ramo: é a representação de um único componente conectado entre dois nós, tal como um resistor ou uma fonte de tensão. Na figura 1, o componente 2, conectado entre os nós 1 e 2, é um ramo do circuito. Portanto, um ramo representa um elemento de dois terminais.

nó: é o ponto de junção de um mais dos componentes básicos de um circuito (ramos). Na figura 1 está representado um circuito simples composto de dois nós (nós 1 e 2). Quando um fio ideal conecta dois nós, os dois nós constituem um único nó.

percurso fechado: é um caminho (fechado) formado por um nó de partida, passando por um conjunto de nós e retornando ao nó de partida, sem passar por qualquer nó mais de uma vez. Um percurso fechado é dito independente quando ele contém um ramo que não pertence a nenhum outro caminho fechado;

malha: é um caminho fechado que não contém outro caminho fechado dentro dele. Trata-se, portanto, de um caso especial de caminho fechado. A figura 2 representa um circuito simples composto de 2 malhas (malha 1 e 2). O caminho fechado mais externo do circuito é denominado de *malha externa* e inclui todos os elementos do circuito no seu interior. As demais malhas são também denominadas de *malhas internas*.

O número de malhas e nós de um circuito depende da topologia do mesmo. Existe, no entanto, uma relação entre o número de malhas, ramos e nós do circuito dada pela seguinte equação, a qual pode ser facilmente verificada:

$$m = b - n + 1 \quad (1)$$

m - número de malhas

n - número de nós

b - número de ramos

Além destas definições também são úteis as seguintes definições:

conexão série: dois ou mais elementos são ditos *em série* se eles estiverem conectados em seqüência e conduzirem a mesma corrente.

conexão paralela: dois ou mais elementos são ditos *em paralelo* se eles estiverem conectados aos mesmos dois nós e possuírem a mesma tensão aplicada sobre eles.

2. Lei das Correntes de Kirchhoff (LCK)

A LCK pode ser enunciada da seguinte forma: *a soma das correntes que chegam a um nó é igual à soma das correntes que saem do mesmo nó*. Considerando-se as correntes que chegam a um nó como positivas e as que saem como negativas, a Lei das Correntes de Kirchhoff estabelece que *a soma algébrica das correntes incidindo em um nó deve ser nula*. A LCK é baseada na Lei da Conservação da Carga e pode também ser obtida diretamente dela.

Baseado no enunciado da LCK e considerando-se o circuito mostrado na Figura 1, pode-se escrever a seguinte equação para o nó marcado como 1:

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad i_1 = i_2 + i_3 \quad (2)$$

O número de equações independentes obtidas com a aplicação da Lei das Correntes é sempre igual ao número de nós menos 1 ($n-1$). Isto pode ser comprovado facilmente aplicando-se a Lei das Correntes ao nó 2 da Figura 1, de onde resultará uma equação idêntica à equação acima.

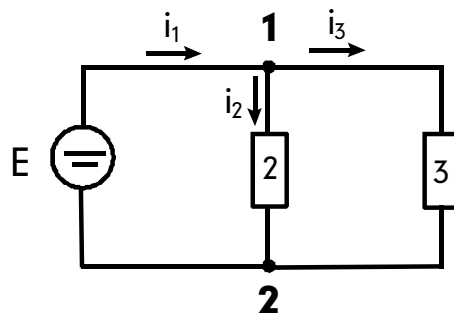


Figura 1 - Circuito com 2 nós

3. Lei das Tensões de Kirchhoff (LTK)

A LTK pode ser enunciada da seguinte forma: *a soma das elevações de potencial ao longo de um percurso fechado qualquer (malha) é igual à soma das quedas de potencial no mesmo percurso fechado*. Assumindo-se que as quedas de potencial (sentido de percurso do terminal positivo para o negativo) são positivas ao longo do percurso e que as elevações de potencial (sentido do percurso do terminal negativo para o positivo) são negativas, a Lei das Tensões de Kirchhoff estabelece que *a soma algébrica das tensões em um percurso fechado é nula*. Conforme as definições anteriores, uma malha é um tipo especial de percurso fechado. Assim, a LTK também vale para as malhas que compõem o circuito.

Baseado no enunciado da LTK e considerando-se o circuito da Figura 2, pode-se escrever para a malha 1 a seguinte equação:

$$-E + v_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad E = v_2 \quad (3)$$

Para a malha 2 obtém-se do mesmo modo:

$$-v_1 + v_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_1 = v_2 \quad (4)$$

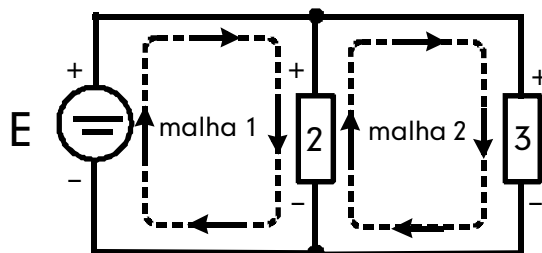


Figura 2 - Circuito com 2 malhas

O número de equações de malha independentes obtidas com a aplicação da Lei das Tensões de Kirchhoff às malhas do circuito é definido pela relação:

$$\text{Equações de malha independentes} = b - n + 1 = m \quad (5)$$

Para o circuito ilustrado na Figura 2 o número de equações independentes é 2. Pode-se também escrever uma equação para a malha externa. Para esta malha resulta uma equação que é uma combinação linear das equações (2) e (3), sendo portanto redundante. As equações que devem ser consideradas são, assim, apenas as relativas às malhas internas.

4. Número de Equações de Circuito Independentes

Em todo circuito elétrico composto de **b** elementos básicos existem **2b** incógnitas, uma vez que em cada elemento a corrente e a tensão são variáveis serem determinadas em função das fontes de alimentação e da topologia do circuito. Assim, são inicialmente necessárias **2b** equações independentes para a determinação completa do circuito. Este número pode ser reduzido para **b**, usando-se as **b** relações básicas dos elementos (ver Tabela 1, da apostila de *Conceitos Básicos de Circuitos Elétricos*). O número de equações passa a ser desta forma igual a **b**. Usando-se as Lei de Kirchhoff das Correntes obtém-se **(n-1)** equações de corrente e usando-se a Lei de Kirchhoff das Tensões obtém-se **(b-n+1)** equações de malha. As Leis de Kirchhoff fornecem portanto as **(n-1) + (b-n+1) = b** equações independentes necessárias para a solução do circuito. Estas relações podem ser verificadas pelo exemplo mostrado nas Figuras 1 e 2.

5. Exemplo de Solução de Circuitos

Embora não seja o procedimento mais rápido e aconselhável, os circuitos podem sempre ser solucionados estabelecendo-se as **2b** equações, conforme o exemplo abaixo mostra. Os procedimentos mais adequados serão analisados quando do estudo do Método das Tensões de Nó (Análise Nodal) e o Método das Correntes de Malha (Análise de Malhas), os quais são mais comumente empregados na prática por serem mais simples e rápidos.

As equações para o circuito mostrado na Figura 3 devem ser estabelecidas e todas as correntes e tensões dos seus elementos determinadas. O elemento 1 é uma fonte independente de tensão simbolizada por **E**. Os elementos 2 e 3 serão resistores designados por **R₂** e **R₃** respectivamente.

Para este circuito existem inicialmente $2b = 2 \cdot 3 = 6$ incógnitas. Como a fonte de tensão possui uma tensão conhecida ($v_1 = E$), existem de fato 5 incógnitas, as quais são: i_1 , i_2 , i_3 , v_2 , v_3 . Pelas relações básicas de tensão-corrente para resistores (Lei de Ohm) obtém-se:

$$i_2 = \frac{v_2}{R_2} \quad (\text{i})$$

$$i_3 = \frac{v_3}{R_3} \quad (\text{ii})$$

Pela LCK obtém-se para o nó 1:

$$i_1 = i_2 + i_3 \quad (\text{iii})$$

Pela LTK obtém-se para a malha 1 e 2 respectivamente:

$$v_2 = E \quad (\text{iv})$$

$$v_3 = v_2 = E \quad (\text{v})$$

O sistema formado pelas equações (i)-(v) pode agora ser resolvido. Substituindo-se (iv) e (v) em (i) e (ii) obtém-se as correntes nos resistores 1 e 2:

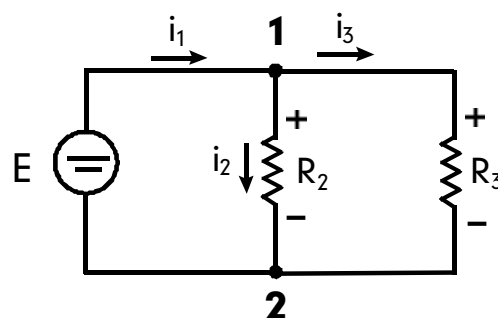


Figura 3 - exemplo de aplicação da LCK

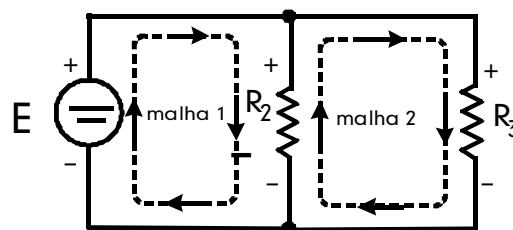


Figura 4 - exemplo de aplicação da LTK

$$i_2 = \frac{E}{R_2} \quad (\text{vi})$$

$$i_3 = \frac{E}{R_3} \quad (\text{vii})$$

Substituindo-se (vi) e (vii) em (iii) resulta para a corrente da fonte, designada por i_1 , a seguinte expressão:

$$i_1 = \frac{v_2}{R_2} + \frac{v_3}{R_3} = \frac{E}{R_2} + \frac{E}{R_3} = E \cdot \left(\frac{R_2 + R_3}{R_2 \cdot R_3} \right) \quad (\text{vi})$$

As grandezas i_1 , i_2 , i_3 , v_2 , v_3 ficam assim completamente determinadas.

6. Exercícios Propostos

A lista de exercícios abaixo foi selecionada da bibliografia da disciplina. Recomenda-se que todos os exercícios sejam resolvidos.

Charles K. Alexander e Matthew N. O. Sadiku (2003). Fundamentos de circuitos elétricos. Bookman (Central 20, Edição 2000) - Capítulo 2. Questões de revisão: 2.1 a 2.9. Problemas: 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6, 2.7, 2.8, 2.9, 2.10, 2.11, 2.12, 2.13, 2.14, 2.15, 2.16, 2.17 e 2.18.